

# Title

Mathematical Models and Algorithms for Optimisation of the LEGO Construction Problem

# Author

Torkil Kollsker

# Summary

This thesis develops mathematical models and algorithms for optimisation of the LEGO construction problem. This optimisation framework aims to aid a designer in creating a LEGO construction. The designer defines the shape and colours of an object and selects a set of available LEGO bricks. The optimisation framework then decides the placement of the LEGO bricks such that they combine into a stable LEGO construction that resembles the designed object.

The literature on the LEGO construction problem has grown since the first article in 1998. However, it has not yet focused on arranging the LEGO bricks systematically to ensure visually pleasing brick configurations. It has only considered LEGO bricks having the same height even though using various brick heights is essential for creating diverse LEGO constructions. Furthermore, it has not taken into account that some LEGO brick dimensions do not come in all colours. Notably, most methods in the literature rely on having the  $1 \times 1$  LEGO brick available. This thesis proposes constructive heuristics and mixed-integer linear programming to ensure a systematic and feasible placement of LEGO bricks and plates.

Ensuring the structural integrity of a LEGO construction is paramount. This thesis discusses methods from the literature as well as new methods for quantifying structural integrity. The findings of this thesis show that the most promising method is a static limit analysis used with quadratic programming. Because of very high computation times, this thesis proposes a heuristic that aggregates a selection of variables and constraints to reduce the model size. The results show significant time reductions.

The main finding of this thesis is to combine combinatorial optimisation with structural optimisation. The combinatorial part of the problem deals with deciding the placement of the LEGO bricks, and the structural part of the problem deals with distributing the forces between the bricks. While the literature has extensively studied these parts separately, both parts are mutually dependent. This thesis proposes an efficient framework for finding brick configurations that are in static equilibrium. Due to the relatively fast computations, a practitioner can use this optimisation framework as an interactive tool for designing LEGO constructions.

The difficult part of the problem is not to cover the entire construction with LEGO bricks. For most LEGO constructions, many feasible brick configurations

exist. Instead, the hardest part is to place the LEGO bricks such that they satisfy the structural integrity and aesthetics of the construction. These quantities complicate the problem in two ways. First, they are computationally expensive and difficult to define, respectively. Second, they depend on the interaction between the bricks. This interdependency amongst the bricks makes it difficult to decompose the problem into smaller and more tangible parts. This thesis uses strategies that are used in practice to ensure both structural integrity and aesthetics. To validate the structural integrity of the LEGO construction, this thesis uses the static limit analysis. However, this analysis does not account for all external load cases. Future research could improve the approximations of structural integrity and aesthetics.

This thesis mainly focuses on solid LEGO construction. However, hollow constructions are lighter and thus allow for creating more diverse LEGO construction. Future research could incorporate hollowing strategies into the optimisation framework.

While this thesis does not solve the LEGO construction problem, it fills some of the gaps in the literature. Furthermore, it improves the current workflow for creating LEGO constructions.

## Dansk resumé (Danish summary)

I denne afhandling udvikler vi matematiske modeller og algoritmer til optimering af LEGO konstruktionsproblemet. Optimeringen skal hjælpe en designer med at skabe en LEGO konstruktion. Designeren definerer formen og farverne på et objekt og vælger et sæt tilgængelige LEGO klodser. Optimeringsalgoritmen finder derefter en placering af LEGO klodserne, således at kombinationen af klodser resulterer i en stabil LEGO konstruktion, som ligner det designede objekt.

Siden den første artikel i 1998 om LEGO konstruktionsproblemet, er litteraturen vokset. Ingen har dog endnu fokuseret på at placere LEGO klodserne systematisk for at sikre visuelt tiltalende byggevejledninger. Det er kun LEGO klodser med samme højde, som er blevet undersøgt, selvom forskellige klodshøjder kan være med til at skabe LEGO konstruktioner i flere forskellige former. Derudover har ingen taget højde for, at nogle LEGO klodser ikke findes i alle farver. For eksempel er de fleste metoder i litteraturen afhængige af at have  $1 \times 1$  LEGO klodsen tilgængelig. I denne afhandling foreslår vi en konstruktionsheuristik og en heltalsprogrammeringsmodel til systematisk at fylde konstruktionen med LEGO klodser i forskellige højder.

Det er et ultimativt krav at sikre den strukturelle integritet af LEGO konstruktionen. I denne afhandling diskuterer vi forskellige metoder fra litteraturen samt foreslår nye metoder til at kvantificere den strukturelle integritet. Resultaterne fra denne afhandling viser, at den mest lovende metode er en statisk analyse, som udregnes med kvadratisk programmering. På grund af de meget høje beregningstider foreslår vi en heuristik, som sammenlægger et udvalg af variabler og begrænsninger for at reducere modelstørrelsen. Resultaterne viser

betydelige tidsreduktioner.

Det vigtigste fund i denne afhandling er at kombinere kombinatorisk optimering med strukturel optimering. Den kombinatoriske del af problemet handler om at fylde konstruktionen med LEGO klodser. Den strukturelle del af problemet handler om at fordele de fysiske kræfter mellem LEGO klodserne. Der findes omfattende forskning om disse dele separat. Delene er dog gensidigt afhængige. Derfor udvikler vi i denne afhandling en effektiv metode til at finde en kombination af LEGO klodser, som er i statisk ligevægt. På grund af de relativt hurtige beregninger kan en designer bruge denne optimeringsmetode som et værktøj til at designe LEGO konstruktioner.

Den svære del af problemet er ikke at dække hele konstruktionen med LEGO klodser. For de fleste LEGO konstruktioner findes der mange mulige kombinationer af klodserne. Derimod er den sværeste del at placere LEGO klodserne, således at de opfylder kravene til den strukturelle integritet og æstetik. Disse to krav komplicerer problemet på to måder. For det første er den strukturelle integritet beregningsmæssigt tung og æstetikken er vanskelige at definere. For det andet afhænger begge krav af klodsernes indbyrdes placering. Denne afhængighed mellem klodserne gør det svært at nedbryde problemet til mindre og mere håndgribelige dele. I denne afhandling bruger vi strategier, som bruges i praksis, til at sikre både den strukturelle integritet og æstetikken. For at validere den strukturelle integritet af LEGO konstruktionen bruger vi den statiske analyse. Denne analyse tager dog ikke højde for alle ydre belastninger. Fremtidig forskning kunne forbedre udregningerne af strukturel integritet og æstetik.

I denne afhandling fokuserer vi hovedsageligt på solide LEGO konstruktioner, selvom hule konstruktioner er lettere og derfor giver flere designmuligheder. Fremtidig forskning kunne tilføje udhulningsstrategier i optimeringen.

Selvom denne afhandling ikke løser LEGO konstruktionsproblemet, så udfylder den nogle af hullerne i litteraturen. Desuden forbedrer afhandlingen den nuværende arbejdsgang til at designe LEGO konstruktioner.